

PROVA DEL 1/2/2006

- ① a) la retta s cercata passa per $P = (1, 2, 3)$ ed è parallela a Π di equazione $3x - y + z = 0$, perciò giace nel piano $\Pi' \parallel \Pi$ per P che avrà equazione $\Pi': 3x - y + z - 4 = 0$. Inoltre s incide r nel punto $\Pi' \cap r$ che avrà pertanto in r ascissa t tale che $3(1+2t) - (-1+3t) + (1-2t) - 4 = 0$ cioè $t = -1$. Perciò $Q = \Pi' \cap r = s \cap r = (-1, -4, 3)$. Dunque s è la retta per i punti P e Q , in particolare è parallela al vettore $\frac{1}{2}(P-Q)$, cioè $\vec{v}_s = (1, 3, 0)$. Si ottengono con equazioni parametriche

$$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- b) σ è il piano per P con vettore normale $\vec{n}_\sigma = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$. Ave

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (6, -2, 3) \quad \text{Si ottiene perciò per}$$

σ equazione $6(x-1) - 2(y-2) + 3(z-3) = 0$, cioè

$$\sigma: 6x - 2y + 3z - 11 = 0$$

- c) la retta t passa per Q ed è perpendicolare a σ , dunque $\parallel \vec{n}_\sigma$. Si ottengono perciò equazioni parametriche

$$t: \begin{cases} x = -1 + 6\mu \\ y = -4 - 2\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

- ② Posto $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ e $g(x, y) = e^{x+1} - y$, si nota che f e g sono di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$, e che le corrispondenti curve di livello $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ passano per il punto $(-1, 1)$. Inoltre $\nabla f = (2x + y, x + 2y)$ con $\nabla f(-1, 1) = (-1, 1)$, ed anche $\nabla g = (e^{x+1}, -1)$ con $\nabla g(-1, 1) = (1, -1)$. In definitiva $\nabla f(-1, 1)$ e $\nabla g(-1, 1)$ risultano paralleli, e con le due curve di livello in $(-1, 1)$ hanno medesima tangente, essendo quest'ultima normale al corrispondente gradiente.

③ $z = f(x, y) = y e^{xy}$ ha per dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} = D$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} + y e^{xy} (-\frac{x}{y^2}) = e^{xy} (1 - \frac{x}{y})$,

dunque $f \in C^1$ in D con $\nabla f = e^{xy} (1, 1 - \frac{x}{y})$

La bisettrice del primo quadrante è parallela al vettore $(1, 1)$.

Con il luogo cercato è costituito dai punti $(x, y) \in D$ tali che

$e^{xy} (1, 1 - \frac{x}{y}) \cdot (1, 1) = 0$, cioè $e^{xy} (1 + 1 - \frac{x}{y}) = 0$, cioè

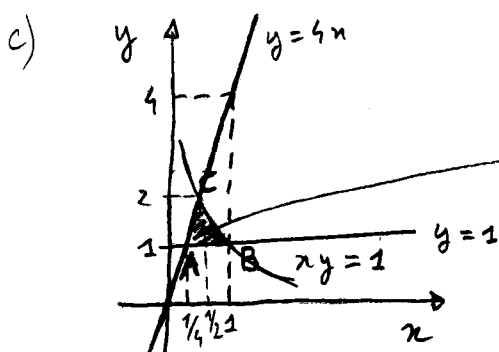
$\frac{x}{y} = 2$. Si tratta dunque delle rette $x = 2y$ del piano xy .

b) Per quanto osservato in a), si ha che f è differenziabile in D .

In particolare ammette piano tangente sopra $(1, 1)$ dato da

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y-1),$$

cioè $z = e + e(x-1) + 0 \cdot (y-1)$ cioè $z = ex$.



$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 4x, xy \leq 1\}$$

$$A \begin{cases} y=4x \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A = (1/4, 1)$$

$$B \begin{cases} xy=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B = (1, 1)$$

$$C \begin{cases} y=4x \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow C = (1/2, 2)$$

$\partial S = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$

• Dato che f è differenziabile in S , non vi sono punti singolari. Inoltre il ∇f non si annulla mai, quindi non vi sono punti critici.

• Ricordiamo quindi gli eventuali punti estremali su ∂S .

① $f|_{\overline{AB}} = e^x$, $x \in [1/4, 1]$, quindi ha minimo in A e $f(A) = e^{1/4}$
ha massimo in B e $f(B) = e$

② $f|_{\overline{AC}} = 4e^{1/4}n$, con $n \in [1/4, 1/2]$, quindi ha minimo in A e $\underline{f(A)} = e^{1/4}$
 ha Massimo in C e $\underline{f(C)} = 2e^{1/4}$

③ Infine studiamo $f|_{\overline{BC}}$ con il metodo di Lagrange:

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} e^{x/y} & e^{x/y}(1-x/y) \\ y & n \end{pmatrix} = 0 \\ ny = 1, \quad n \in [1/2, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x/y} [n - y(1-x/y)] = 0 \\ ny = 1 \\ n \in [1/2, 1] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n - y = 0 \\ ny = 1 \\ n \in [1/2, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2n \\ 2n^2 = 1 \\ n \in [1/2, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1/\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

Vi è dunque un punto critico $D = (1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$ con $\underline{f(D)} = \sqrt{2}e^{1/2}$.

Riassumendo, i punti da analizzare sono:

$$A = (1/4, 1) \longrightarrow f(A) = e^{1/4} \longleftarrow \text{MIN}$$

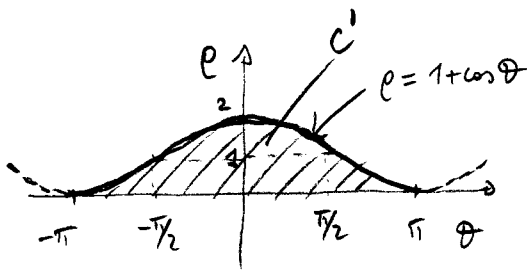
$$B = (1, 1) \longrightarrow f(B) = e \longleftarrow \text{MAX}$$

$$C = (1/2, 2) \longrightarrow f(C) = 2e^{1/4}$$

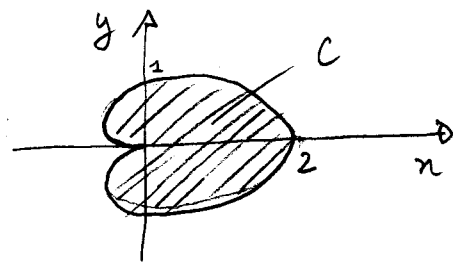
$$D = (1/\sqrt{2}, \sqrt{2}) \longrightarrow f(D) = \sqrt{2}e^{1/2}$$

Dunque A è punto di minimo e B è punto di Massimo.

④



$$\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Area di } C}} &= \iint_C dx dy = \iint_{C'} p \, d\theta \, dp = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} p \, dp = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{p^2}{2} \right]_0^{1+\cos\theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin\theta \cos\theta + \theta}{2} + 2\sin\theta \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3}{4} [\theta]_{-\pi}^{\pi} = \underline{\underline{3\pi/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti } \int \cos^2\theta \, d\theta &\stackrel{\text{P.P.}}{=} \sin\theta \cos\theta + \int \sin^2\theta \, d\theta = \sin\theta \cos\theta + \int (1 - \cos^2\theta) d\theta = \\ &= \sin\theta \cos\theta + \theta - \int \cos^2\theta \, d\theta \quad \text{da cui } \int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\sin\theta \cos\theta + \theta}{2} + C \end{aligned}$$

⑥

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{e^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{e^2}\right)^n + \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$$

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{e^2}\right)^n$ è geometrica di ragione $-1 < -\frac{2}{e^2} < 1$, essa

converge e $\frac{1}{1 + \frac{2}{e^2}} = \frac{e^2}{e^2 + 2}$.

Analogamente $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$ è geometrica di ragione $-1 < \frac{3}{e^2} < 1$, dunque

essa converge e $\frac{1}{1 - \frac{3}{e^2}} = \frac{e^2}{e^2 - 3}$.

Si conclude così che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{e^{2n}} = \frac{e^2}{e^2 + 2} + \frac{e^2}{e^2 - 3}$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \ln^2(1 + \frac{1}{n}) + \frac{1}{n^3}}{\sqrt{e^{1/n} - 1}} \quad \text{è serie a termini positivi.}$$

Il termine n -esimo è dato da $a_n = \frac{\ln^2(1 + \frac{1}{n}) + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n} \sqrt{e^{1/n} - 1}}$

ove sia numeratore che denominatore sono infinitesimi.

Calcoliamone l'ordine.

• $\ln(1 + \frac{1}{n})$ è inf. di ordine 1 poiché $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1+t} = 1$

dunque $\ln^2(1 + \frac{1}{n})$ è inf. di ordine 2, mentre $\frac{1}{n^3}$ è di ordine 3;

si conclude che il numeratore è infinitesimo di ordine 2.

• $e^{1/n} - 1$ è inf. di ordine 1 poiché $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$

dunque $\sqrt{e^{1/n} - 1}$ è inf. di ordine $1/2$, mentre $\frac{1}{n}$ è di ordine 1;

si conclude che il denominatore è infinitesimo di ordine $1 + 1/2 = 3/2$.

Però a_n è infinitesimo di ordine $2 - 3/2 = 1/2 < 1$.

Si conclude quindi che la serie è divergente.